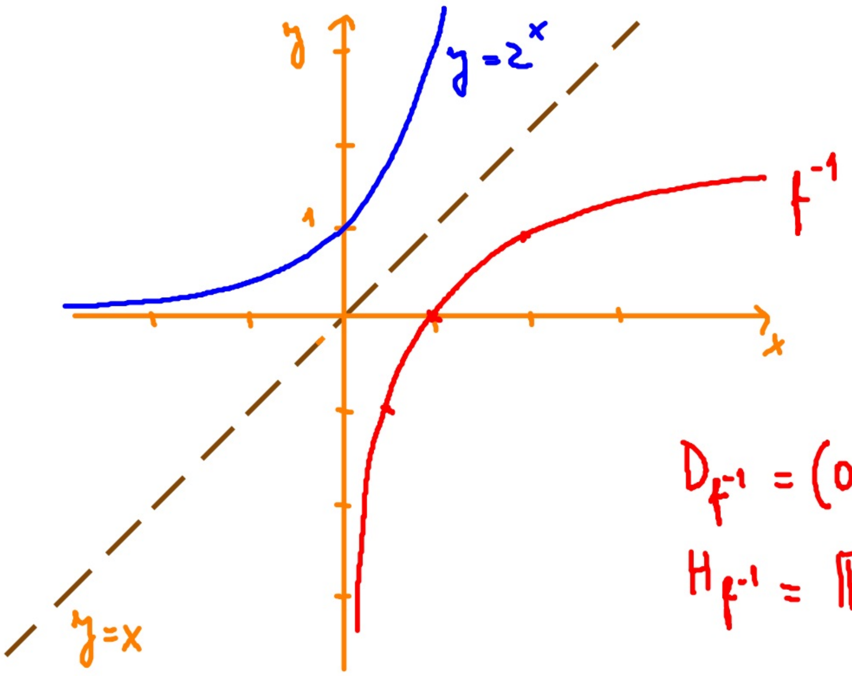
Logaritmická funkce

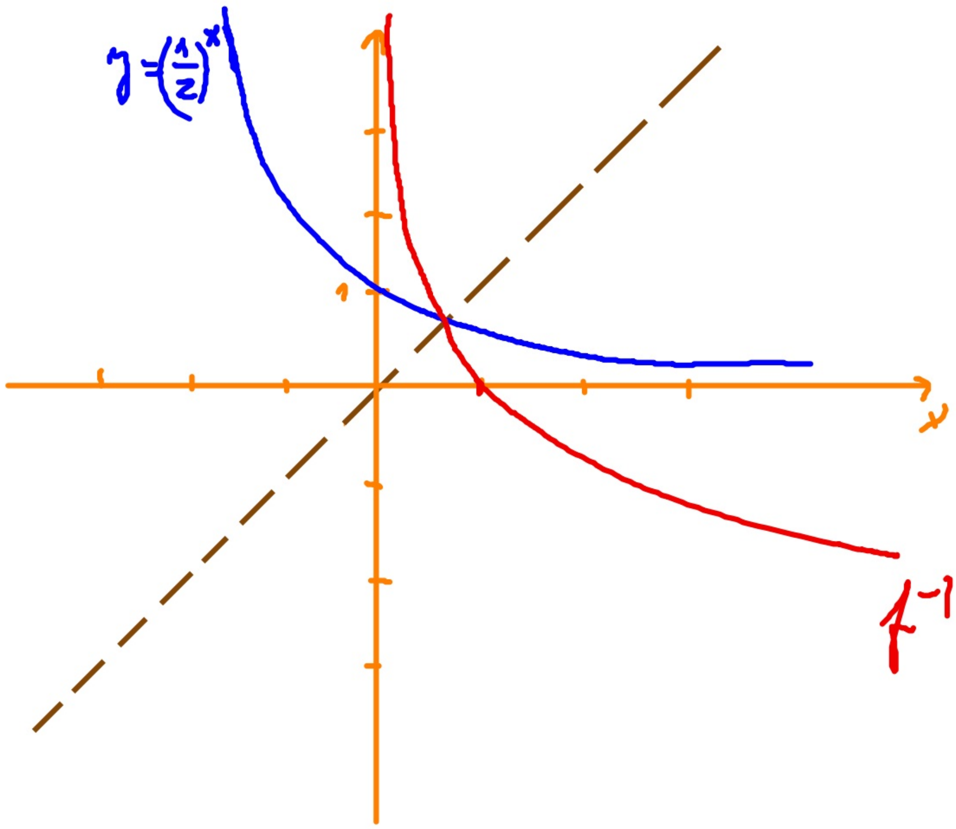
Příklad 1: Sestrojte graf funkce inverzní k funkci $y = 2^x$



$D_{f^{-1}} = (0, \infty)$

$H_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Příklad 2: Sestrojte graf funkce inverzní k funkci $y = (\frac{1}{2})^x$



logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k funkci $y = a^x$

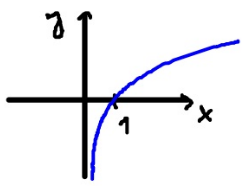
$a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \wedge a \neq 1$

hodnoty logaritmické funkce značíme $y = \log_a x$

a čteme logaritmus x o základu a

Vlastnosti grafu logaritmické funkce

pro $a > 1$



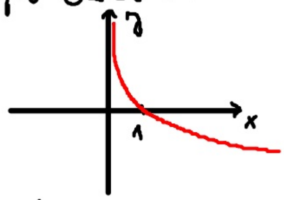
$D = (0, \infty)$ $H = \mathbb{R}$

rostoucí, prostá

není omezená, nemá extrémy

$f(1) = 0$

pro $0 < a < 1$



$D = (0, \infty)$, $H = \mathbb{R}$

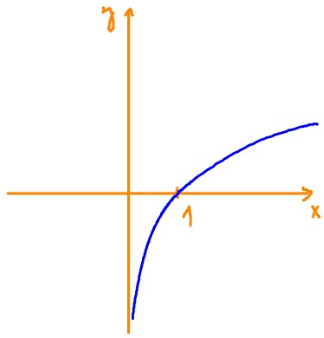
klesající, prostá

není omezená, nemá extrémy

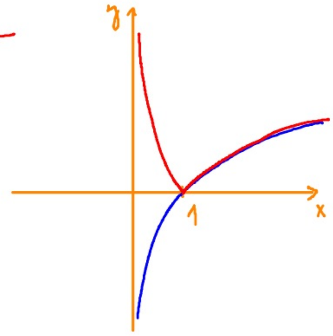
$f(1) = 0$

Příklad 3: Sestrojte graf funkce $y = |\log_2 x|$

a) $y = \log_2 x$ —

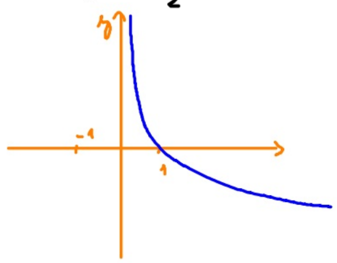


b) $y = |\log_2 x|$ —

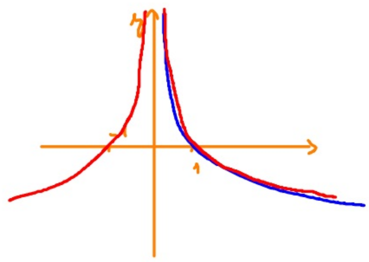


Příklad 4: Sestrojte graf funkce $y = -\log_{\frac{1}{2}} |x|$

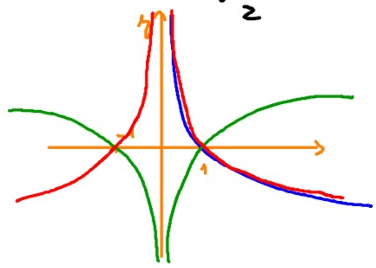
a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ —



b) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ —

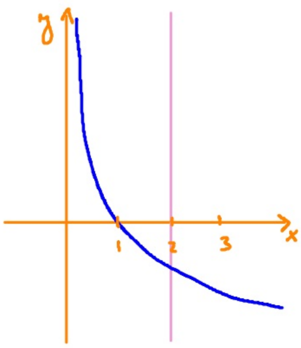


c) $y = -\log_{\frac{1}{2}} |x|$ —

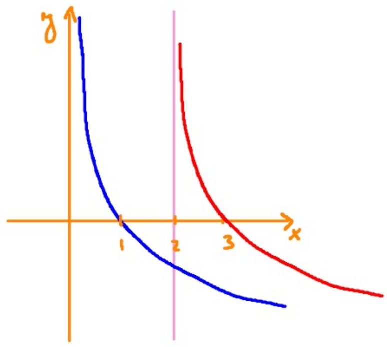


Příklad 5: Sestrojte graf funkce $y = \left| \log_{\frac{1}{5}} (x-2) \right|$

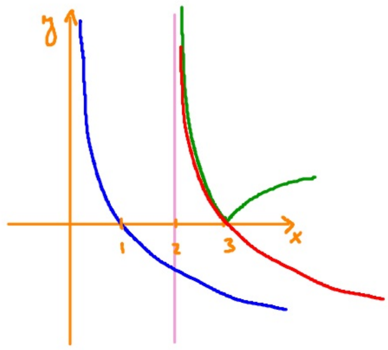
a) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ —



b) $y = \log_{\frac{1}{5}} (x-2)$ —

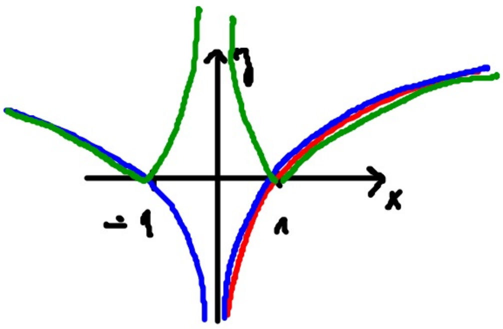


c) $y = \left| \log_{\frac{1}{5}} (x-2) \right|$ —

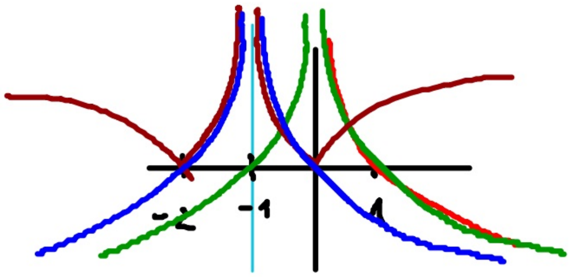


Úlohy k procvičování:

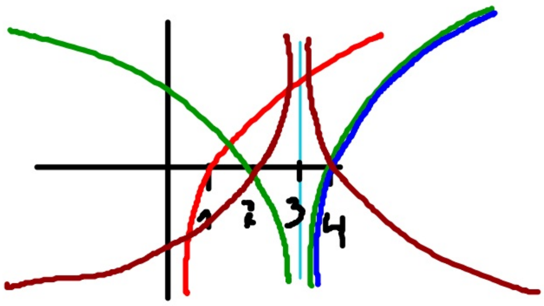
1) $y = \left| \log_3 |x| \right|$



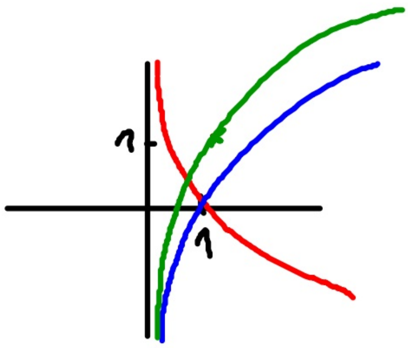
2) $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x+1| \right|$



3) $y = -\log_4 |x-3|$



4) $y = -\log_{\frac{1}{2}} x + 1$



Logaritmus

Definice: Logaritmus x o záklaadu a se rovná y právě tehdy, když se a na y rovná x

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Vypočítat logaritmus znamená určit exponent, na který musíme umocnit základ, abychom získali argument

Příklad 1: Vypočítejte $\log_2 8$

Na kolikátou musíme umocnit 2, abychom dostali 8?

$$\log_2 8 = 3$$

Příklad 2: Vypočítejte $\log_{10} 0{,}01$

Na kolikátou musíme umocnit 10, abychom dostali 0,01?

$$\log_{10} 0{,}01 = -2$$

Příklad 3: Vypočítejte logaritmy

$\log_6 6 = 1$

$\log_7 49 = 2$

$\log_2 0{,}5 = -1$

$\log_9 \sqrt{3} = \frac{1}{4}$ $\qquad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{4}}$

$\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$

$\log_{10} 10^{-3} = -3$

$\log_a a = 1$ pro $a > 0 \wedge a \neq 1$

Příklad 4: Určete x tak, aby platilo

$\log_8 x = 3 \quad \Rightarrow x = 8^3 = \left(2^3\right)^3 = 2^9 = 512$

$\log_2 x = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

$\log_2 x = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

$\log_5 x = -3 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{125}$

$\log_5 x = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

Příklad 5: Určete x tak, aby platilo

$\log_x 100 = 2 \Rightarrow x = 10$

$\log_x 4 = 2 \Rightarrow x = 2$

$\log_x 0{,}0001 = -2 \Rightarrow x = 100$

$\log_x 25 = 2 \Rightarrow x = 5$

Příklad 6: Vypočítejte $5^{\log_5 2}$

Využijeme toho, že exponenciální a logaritmická funkce o stejném základu jsou navzájem inverzní

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "\log_5 x"] & \log_5 2 \arrow[l, bend left, "5^x"] \end{tikzcd}$$

$$5^{\log_5 2} = 2$$

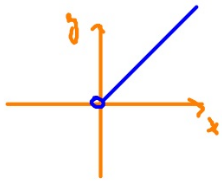
Příklad 7: Vypočítejte

$$10^{\log_{10} 1} = 1$$

$$8^{1+\log_8 5} = 8^1 \cdot 8^{\log_8 5} = 8 \cdot 5 = \underline{\underline{40}}$$

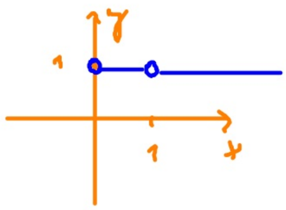
Příklad 8: Sestrojte graf funkce $y = 2^{\log_2 x}$

$$y = 2^{\log_2 x} = x \quad \text{pro } x > 0$$



Příklad 9: Sestrojte graf funkce $y = \log_x x$

$$y = \log_x x = 1 \quad \text{pro } x > 0 \wedge x \neq 1$$



$\boxed{\text{D.C. } 7.36/141}$

Věty o logaritmech

Věta 1: Logaritmus součinu je roven součtu logaritmů

$$(\forall a>0 \wedge a\neq 1)\ (\forall r>0)\ (\forall s>0):\ \log_a(r\cdot s)=\log_a r+\log_a s$$

Důkaz:

$$r=a^{\log_a r} \qquad s=a^{\log_a s} \qquad r\cdot s=a^{\log_a r}\cdot a^{\log_a s}=\underline{a^{\log_a r+\log_a s}}$$

$$r\cdot s=a^{\log_a(r\cdot s)}=\underline{a^{\log_a(r\cdot s)}}$$

Věta 2: Logaritmus podílu je roven rozdílu logaritmů

$$(\forall a>0 \wedge a\neq 1)\ (\forall r>0)\ (\forall s>0):\ \log_a \frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$$

Věta 3: Logaritmus mocniny je roven součinu exponentu a logaritmu základu

$$(\forall a>0 \wedge a\neq 1)\ (\forall r>0)\ (\forall s>0):\ \log_a r^s=s\cdot\log_a r$$

Příklad 1: Vypočítejte

$$4 \cdot \log_6 3 + 5\log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 3^4 + \log_6 2^5 - \log_6 12 =$$

$$= \log_6 \left(\frac{3^4 \cdot 2^5}{12}\right) = \log_6 \left(2^3 \cdot 3^3\right) = \log_6 6^3 = \underline{\underline{3}}$$

Příklad 2: Vypočítejte

$$\log_4 16^{-0,5} = \log_4 \left(4^2\right)^{-0,5} = \log_4 4^{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

Příklad 3: Vypočítejte

$$\log_{10} 1500 - \log_{10} 15 = \log_{10} \frac{1500}{15} = \log_{10} 100 = \underline{\underline{2}}$$

Logaritmy o základu 10 nazýváme dekadické logaritmy a základ v jejich zápisu obvykle neuvádíme

$$\log_{10} x = \log x$$

Příklad 4: Koncentrace radioaktivního uhlíku ${}^{14}_{6}C$ je v živých organismech stálá, po jejich úmrtí klesá s poločasme rozpadu 5 570 let. Jak starý je archeologický nález, v němž klesla koncentrace uhlíku ${}^{14}_{6}C$ na 11 % oproti živému organismu?

Poznámka: Poločas rozpadu je doba, za kterou klesne koncentrace radioaktivní látky na polovinu. Měření koncentrace uhlíku ${}^{14}_{6}C$ označujeme jako radioaktivní hodiny.

$T = 5\,570$ let

$m(t) = 0{,}11 \cdot m(0)$

Zákon radioaktivní přeměny:

$$m(t) = m(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$0{,}11\, m(0) = m(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

$$0{,}11 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

$$\log_{10} 0{,}11 = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

$$\log_{10} 0{,}11 = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

$$\log_{10} 0{,}11 = \frac{t}{5570} \log_{10} \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{5570 \cdot \log_{10} 0{,}11}{\log_{10} \frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{t = 17\,737 \text{ let}}}$$

Stáří nálezu je 17 737 let.

Příklad 5: Koncentrace pesticidu s poločasem rozpadu 30 let v potravinách nyní činí 5.10^{-6} %. Za jak dlouho klasne tato koncentrace na 2.10^{-6} %, pokud již pesticid nebudeme vůbec používat?

současnost : 5.10^{-6} %
budoucnost : 2.10^{-6} %
$T = 30$ let
$t = ?$ let

$$c = c_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$2.10^{-6} = 5.10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$0{,}4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\log 0{,}4 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\log 0{,}4 = \frac{t}{30} \log 0{,}5$$

$$t = 30 \cdot \frac{\log 0{,}4}{\log 0{,}5}$$

$$\underline{t = 39{,}6 \text{ roku}}$$

Bude to trvat téměř 40 let.

Příklad 6: Při průchodu deskou o tloušťce 1 mm klesne intenzita nebezpečného záření o 5%. Jak silná by musela být deska, aby po průchodu deskou klesla intenzita záření o 40% ?

1 mm 5%

$$I = I_0 \cdot 0{,}95^x$$

$$0{,}6\, I_0 = I_0\, 0{,}95^x$$

$$0{,}6 = 0{,}95^x$$

$$\log 0{,}6 = \log 0{,}95^x$$

$$x = \frac{\log 0{,}6}{\log 0{,}9}$$

$$\underline{\underline{x = 10 \text{ mm}}}$$

Deska by musela mít tloušťku 10 mm.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{D.C.} \\ 7.37 - 7.41 / 144, 145\end{array}}$$