# VLASTNOSTI ARITMETICKÝCH A GEOMETRICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

- pro aritmetickou psl s diferencí $d$ :

a) $d > 0 \Rightarrow$ rostoucí a omezená zdola
b) $d < 0 \Rightarrow$ klesající a omezená shora
c) $d = 0 \Rightarrow$ konstantní a omezená

- pro geometrickou psl s $q$ a $a_1$ :

1) $a_1 > 0 \wedge q > 1 \Rightarrow$ je rostoucí a omezená zdola
2) $a_1 < 0 \wedge q \in (0,1) \Rightarrow$ je rostoucí a omezená
3) $a_1 > 0 \wedge q \in (0,1) \Rightarrow$ klesající a omezená
4) $a_1 < 0 \wedge q > 1 \Rightarrow$ klesající a omezená shora
5) $|q| \leq 1 \Rightarrow$ je omezená
6) $q < -1 \wedge a_1 \neq 0 \Rightarrow$ není omezená zdola ani shora ani monotonní

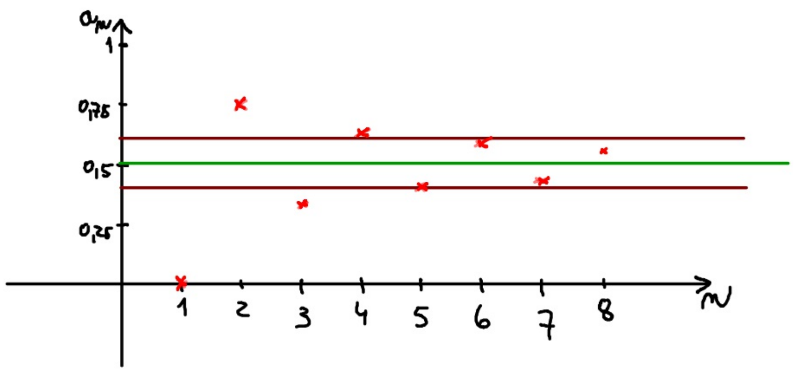
# LIMITA POSLOUPNOSTI

Příklad 1: Zapište prvních 8 členů posloupnosti $\left\{\frac{(-1)^n + n}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$a_1 = 0 \qquad a_2 = \frac{3}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_4 = \frac{5}{8}$

$a_5 = \frac{2}{5} \qquad a_6 = \frac{7}{12} \qquad a_7 = \frac{3}{7} \qquad a_8 = \frac{9}{16}$

Hodnoty členů této posloupnosti se s rostoucím n přibližují k nějakému číslu - v tomto případě konkrétně k číslu $\frac{1}{2}$




Číslo, k němuž se s rostoucím n hodnoty posloupnosti neomezeně blíží, nazýváme limita posloupnosti

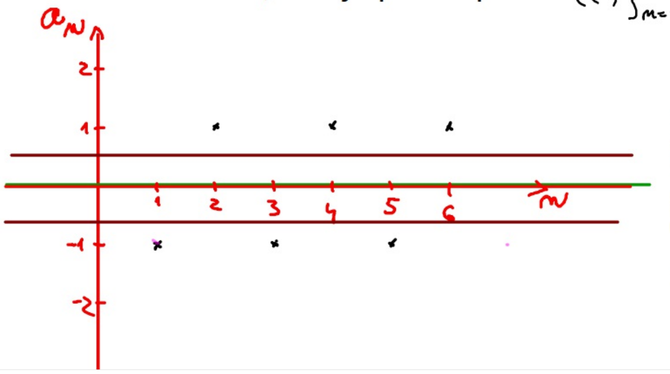
Definice: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu a právě tehdy, když pro libovolné kladné reálné číslo $\varepsilon$ existuje přirozené číslo $n_0$ takové, že pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná $n_0$ je absolutní hodnota rozdílu $a_n$ - a menší než $\varepsilon$.

Symbolicky: $a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)\ n \geqq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Poznámka: Číslo $\varepsilon$ v definici limity vyjadřuje vzdálenost hnědých čar od zelené čáry v obrázku na předchozí straně. Zelená čára označuje limitu psloupnosti a definice říká, že i když umístím hnědé čáry do co nejmenší vzdálenosti od limity, tak všechny členy posloupnosti počínaje $n_0$ budou mít hodnoty mezi hnědými čarami.

Definice: Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá konvergentní.
Posloupnost, která nemá vlastní limitu, se nazývá divergentní.

Příklad 2: Rozhodněte, zda je posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní nebo divergentní




Hodnoty posloupnosti oscilují mezi -1 a 1.
Číslo 0 ani jiné číslo být limitou nemůže, protože pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ některé hodnoty vždy "utečou" z pásu mezi hnědými čarami.
Posloupnost je tedy divergentní.

Příklad 3: Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní

Krok 1: Prozkoumáme několik prvních členů posloupnosti a pokusíme se najít limitu

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{4} \quad a_4 = \frac{4}{5} \quad a_5 = \frac{5}{6} \quad a_6 = \frac{6}{7} \quad a_7 = \frac{7}{8}$$

Hypotéza: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Krok 2: Zapíšeme definici limity posloupnosti a upravíme ji pro zadanou posloupnost

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)\ |a_n-a|<\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)\ \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

Krok 3: Určíme, jak k libovolnému ε>0 najít příslušné $n_0$ z definice

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon}<n+1$$

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|<\varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon}-1<n$$

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon \qquad n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$$

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

Příklad 4: Dokažte, že $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-2\right) = -2$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)\ |a_n-a|<\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-2\right) = -2 \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0)\ \left|\frac{(-1)^n}{n^2}-2+2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n$$

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$$

# Věty o limitách posloupností

Jsou dány konvergentní posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitami $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Potom jsou kovergentní i následující posloupnosti
a pro jejich limity platí:

1) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

3) $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; $c \in \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$

4) $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

5) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pro $b_n \neq 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ pro $b \neq 0$

6) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Příklad 1: Dokažte, že $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): n \geqq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

Příklad 2: Vypočítejte limity

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{1+2\cdot 0} = \underline{\underline{3}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = \underline{\underline{1}}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(2n-1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n+3}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{2}}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+5}{4n^3+2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{4+\frac{2}{n}} = \underline{\underline{0}}$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-4n+3}{3n^2+2n-1} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = \underline{\underline{0}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n\cdot n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}+(-1)^n}{1} = \lim (-1)^n \longrightarrow$ neexistuje (posloupnost je divergentní)

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-4}{5n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{4}{n^3}}{\frac{5}{n}} \longrightarrow$ neexistuje (psl je divergentní)

Věta: Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q, pak je konvergentní a má limitu rovnou 0 právě tehdy, když $|q| < 1$

Příklad 3: Určete limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 1{,}03^n \longrightarrow$ neexistuje $\quad |1{,}03| > 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}6^n = \underline{\underline{0}}$

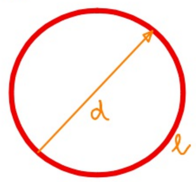
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}4^n+3) = \underline{\underline{3}}$

D.C. 3.12, 3.13 / 92, 93

# Užití limit posloupností

Pomocí limit posloupností můžeme definovat některá iracionální čísla

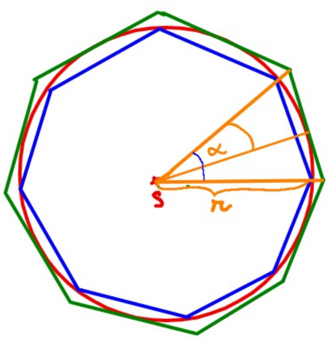
## 1) číslo $\pi$ (Ludolfovo číslo)




$$\pi = \frac{l}{d}$$

Číslo π vyjadřuje poměr délky libovolné kružnice a jejího průměru

Hodnotu čísla π můžeme určit pomocí obvodů pravidelných n-úhelníků, které kružnici vepíšeme a opíšeme. Délka kružnice musí být větší než obvod vepsaného n-úhelníku a zároveň menší než obvod opsaného n-úhelníku




$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2n}$$

$$\sin\alpha = \frac{a_1}{2r} \qquad a_1 = 2r \cdot \sin\alpha$$

$$\sigma_1 = n \cdot a_1 = n \cdot 2r \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n} = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$\sigma_2 = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_2}{2r} \qquad a_2 = 2r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\sigma_3 = n \cdot a_2 = 2n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$$

$$n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} < \pi < n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$$

$$n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} < \pi < n \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

Pro pravidelný osmiúhelník: $8 \cdot \sin 22^\circ 30' < \pi < 8 \cdot \operatorname{tg} 22^\circ 30'$

$$3{,}06 < \pi < 3{,}31$$

Pro pravidelný devadesátišestiúhelník: $96 \cdot \sin\frac{180}{96} < \pi < 96 \cdot \operatorname{tg}\frac{180}{96}$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}143$$

Definice π pomocí limity posloupnosti: $\pi = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}\right)$

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\right)$$

## 2) Eulerovo číslo e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

pro $n = 100$ je $e = 2{,}70$

# Nevlastní limita posloupnosti

Je-li limitou posloupnosti konkrétní reálné číslo, jde o limitu vlastní.
Vedle vlastních limit mohou mít posloupnosti i limitu nevlastní - tou může být buď +∞ nebo -∞

Definice 1: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu +∞ právě tehdy, když platí

$$(\forall K \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0): a_n > K$$

Definice 2: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu -∞ právě tehdy, když platí

$$(\forall L \in \mathbb{R})\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0):\ a_n < L$$

Příklad 1: Určete nevlastní limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} (n+3) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot n^2\right) \text{ neexistuje}$$

Příklad 2: Vypočítejte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{1} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n-1}{3n^3+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{6}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{5}{n^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n^2}-4\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}}{1} - \lim_{n\to\infty} 4 = 0-4 = \underline{\underline{-4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^3-3n^2) = \lim_{n\to\infty} n^3\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right) = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(2+2n)}{\frac{n}{2}(1+2n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{2}{n}}{2} = \underline{\underline{1}}$$